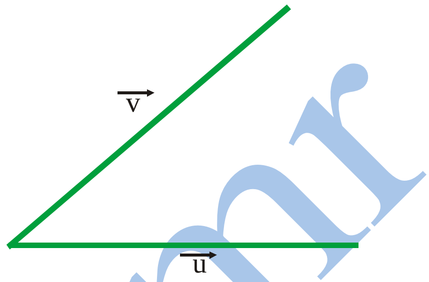
Chapitre 9 ☛ Angles orientés de vecteurs dans le plan orienté

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Angles orientés de deux vecteurs



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan orienté.
$(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $(\vec{v}\ ;\vec{u}\ )$ désignent les deux angles définis par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Les angles orientés $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $(\vec{v}\ ;\vec{u}\ )$ sont opposés.

$-(\vec{u}\ ;\ \vec{v})=(\vec{v}\ ;\vec{u}\ )$ et $-(\vec{v}\ ;\vec{u}\ )=(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- Un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ existe, si et seulement si, $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
- Soit A ; B ; C ; D des points dans le plan orienté,

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})$ existe, si et seulement si, A $\neq$ B et C $\neq$ D.

Mesure d'un angle orienté

- Un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est mesuré modulo 2π :

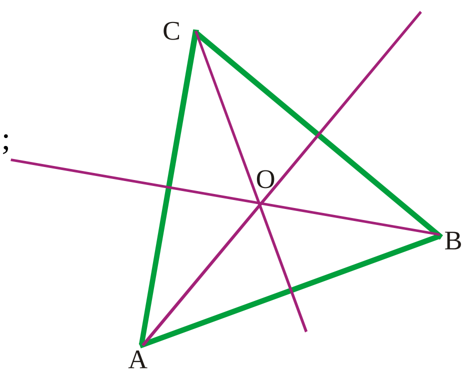
$$(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha \iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha\ [2\pi]$$
$$\iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + 2\pi$$
$$\iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

- La mesure principale de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est celle des mesures de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ modulo $[2\pi]$, qui appartient à l'intervalle$]-\pi\ ;\ \pi[$.

Des exemples de la lecture et de la mesure principale sur des configurations de base

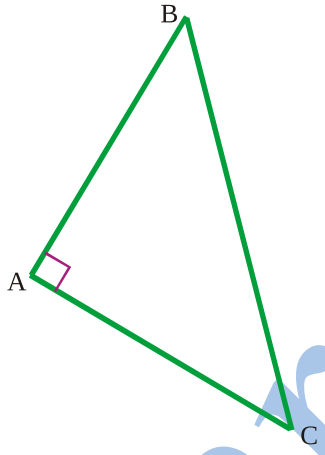
a) ABC un triangle équilatéral direct de centre O.

- $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$;
- $(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC})=\frac{2\pi}{3}$;
- $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{3}$
- $(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OA})=-\frac{2\pi}{3}$;
- $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AO})=\frac{\pi}{6}$;
- $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BO})=-\frac{\pi}{6}$



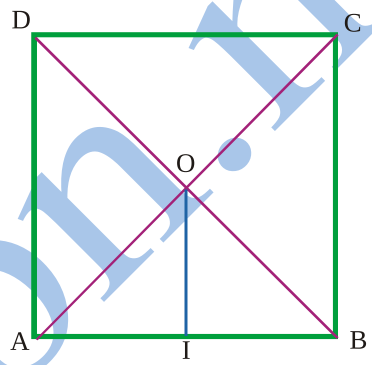
b) ABC un triangle isocèle rectangle en A indirect.

- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\pi}{4}$;
- $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$.



c) ABCD un carré direct de centre O

- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{4}$;
- $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{DO}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$;
- $\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.
- $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right)=\pi$.



Avec I milieu de [AB], on a $\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$; $\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

2) Modulo π

Un angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ peut être mesuré modulo π

$$\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha\ ,\ [\pi] \iff \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha+\pi\ ;\ [\pi]$$
$$\iff \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha-\pi\ ;\ [\pi];$$
$$\iff \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha+k\pi\ \ ;\ \ k\in\mathbf{Z}$$

- **Relation entre le modulo π et le modulo 2π**

$$\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha\ [\pi] \iff \begin{cases}\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha & ;\ [2\pi]\\ \text{ou} & \\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha+\pi & ;\ [2\pi]\end{cases}\quad ;\quad \iff \begin{cases}\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha\\ \text{ou}\\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha+\pi\end{cases}$$

Propriétés

• $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=0\ ;[\pi] \iff \begin{cases}\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=0\\ \text{ou}\\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\pi\end{cases}$	• $-\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\left(\vec{v}\ ;\ \vec{u}\right)\ ;[\pi]$ • $-\left(\vec{v}\ ;\ \vec{u}\right)=\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)\ ;[\pi]$

- $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ ;[\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 2\pi\ ;\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) Double d'un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- $2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est toujours mesuré modulo 2π,
- $-2(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 2(\vec{v}\ ;\vec{u})$;
- $-2(\vec{v}\ ;\vec{u}) = 2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

4) Colinéarité - Orthogonalité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

On a	Si, et seulement si
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0\ ;\ [\ \pi\ ]$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$2(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0\ ;$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}\ ;\vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi]$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux	$2(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi$

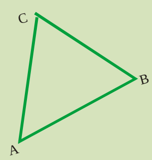
Soit A ; B ; C trois points distincts deux à deux	Soit (AB) et (CD) deux droites
• A ; B ; C sont alignés $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \pi \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0\ ;\ [\pi] \Leftrightarrow$ $2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0$ • ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}\ ; \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi]\ ; \Leftrightarrow$ $2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \pi$	• (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \pi\ ; \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = 0;\ [\pi] \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0$ • (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi] \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \pi$

5) Somme des angles d'un triangle

- ABC un triangle, on a

$(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\overrightarrow{CB}) = \pi$

$2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) + 2(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{CA}\ ;\overrightarrow{CB}) = 2\pi$



- ABC est un triangle rectangle en A si, et seulement si, $2(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})+2(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})=\pi$.

6) Relation angulaire de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$, on a :

$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)+\left(\vec{w}\,;\vec{v}\right)$; $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)+\left(\vec{w}\,;\vec{v}\right)$; $[\pi]$; $2\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=2\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)+2\left(\vec{w}\,;\vec{v}\right)$

7) Effet d'une réflexion sur un angle orienté

Une réflexion transforme un angle orienté en son opposé.

Si, A' ; B' ; C' sont les images respectives des trois points A ; B ; C par une réflexion, alors :

- $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=-(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{A'C'}\,;\overrightarrow{A'B'})$;

  $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=-(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'})$; $[\pi]$

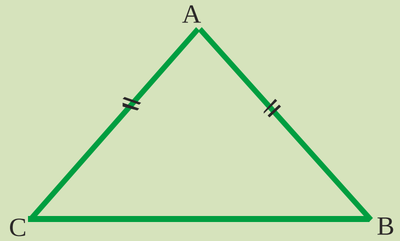
  $=(\overrightarrow{A'C'}\,;\overrightarrow{A'B'})$; $[\pi]$

- $2(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=-2(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'})=2(\overrightarrow{A'C'}\,;\overrightarrow{A'B'})$

ABC est un triangle isocèle en A, si et seulement si,
La réflexion d'axe la médiatrice de [BC] transforme A en A ; B en C ; C en B, si, et seulement si,

- $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})=-(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})$;
- $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})=-(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA})$; $[\pi]$;

  $=(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})$; $[\pi]$;
- $2(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})=-2(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA})=2(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})$.



8) Remplacement de l'un quelconque des vecteurs de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ par un vecteur qui lui est colinéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ;

- $\forall\, k\in\mathbb{R}_+^*$: $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\,k\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$; $\forall\, k\in\mathbb{R}_-^*$: $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\,k\vec{v}\right)+\pi=\left(k\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)+\pi$,
- $\forall\, k\in\mathbb{R}^*$: : $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\,k\vec{v}\right)$; $[\pi]$,

  $=\left(k\vec{u}\,;\vec{v}\right)$; $[\pi]$
- $\forall\, k\in\mathbb{R}^*$: : $2\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=2\left(\vec{u}\,;\,k\vec{v}\right)=2\left(k\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$,

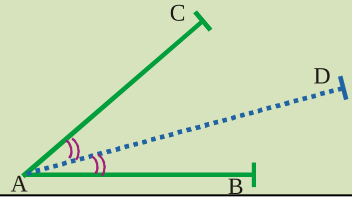
Exemple

• $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\pi$ • $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)+\pi=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+2\pi$ $=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ • $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$; $[\pi]$	• $2\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=2\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ • $2\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=2\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ • $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$; $[\pi]$

9) Bissectrice intérieure d'un angle orienté

La droite (AD) est la bissectrice intérieure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$, si et seulement si,

$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$



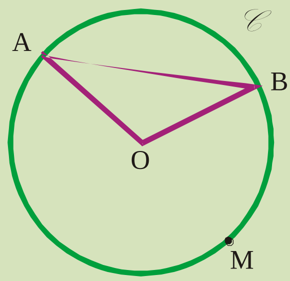
10) Théorème de l'angle inscrit et de la tangente

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soit [AB] une corde sur $\mathscr{C}$.

- Pour tout point M appartenant à $\mathscr{C}$ privé de A et B, on a $2\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.

  C'est le théorème de l'angle inscrit.

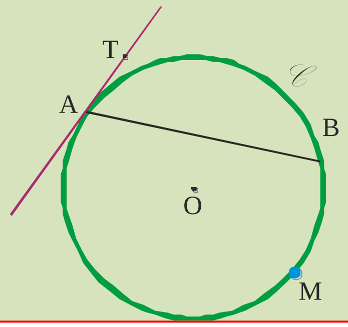
  L'angle $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)$ est un angle inscrit et $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$ est l'angle au centre relativement à la corde [AB].



- Pour tout point T distinct de A de la tangente à $\mathscr{C}$ en A, on a : $2\left(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.

  C'est le théorème de la tangente.

- Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O ; [AB] une corde sur $\mathscr{C}$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ privé de A et B. La droite (AT) est tangente à $\mathscr{C}$ en A, si et seulement si, $2\left(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.



11) Cocyclicité

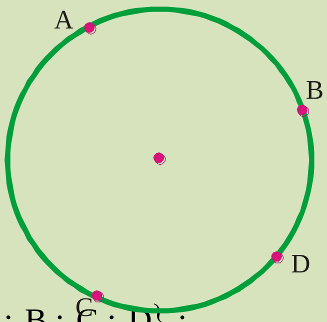
Quatre points A ; B ; C ; D non alignés trois à trois et distincts deux à deux sont : cocycliques (appartiennent à un même cercle c'est-à-dire que chacun appartient au cercle circonscrit au triangle formé par les trois autres), si et seulement si,

$\forall\ M\ ;\ N\ \in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}-\{M\ ;\ N\}$

$2\left(\overrightarrow{PM}\ ;\ \overrightarrow{PN}\right)=2\left(\overrightarrow{QM}\ ;\ \overrightarrow{QN}\right)$;

avec $\{P\ ;\ Q\}\in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}-\{M\ ;\ N\}\Leftrightarrow\forall\ M\ ;\ N\ \in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}$;

$\left(\overrightarrow{PM}\ ;\ \overrightarrow{PN}\right)=\left(\overrightarrow{QM}\ ;\ \overrightarrow{QN}\right)$; $[\pi]$; avec $\{P\ ;\ Q\}\in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}-\{M\ ;\ N\}$



Exemple

A ; B ; C ; D sont cocycliques si, et seulement si,

$2\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)[\ \pi\ ]\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)=2\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow$

$2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$.

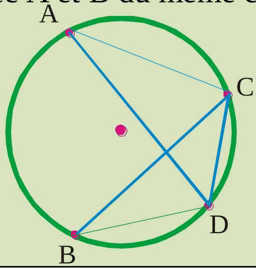
- Soit A ; B ; C ; D quatre points distincts deux à deux,

$$2\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\ [\ \pi\ ]\Leftrightarrow$$

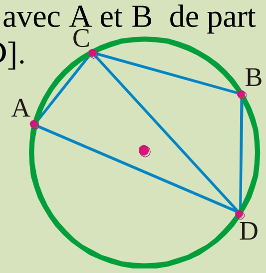
Les quatre points A ; B ; C ; D sont cocycliques ou alignés.

Soit A ; B ; C ; D quatre points non alignés trois à trois et distincts deux à deux.

$\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow$ Les points A ; B ; C ; D sont cocycliques avec A et B du même côté de la corde [CD].



$\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}+\pi\right)\Leftrightarrow$ Les points A ; B ; C ; D sont cocycliques avec A et B de part et d'autre de la corde [CD].

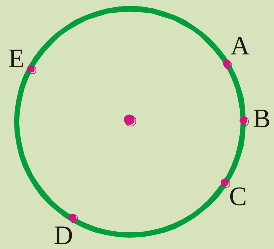


- Des points appartenant à un même cercle sont cocycliques ! (cocyclicité donnée), et alors, par

Exemple

$$\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{EC}\ ;\ \overrightarrow{ED}\right)\ ;\ [\pi]\ ;$$

$$2\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=2\left(\overrightarrow{DE}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right)=2\left(\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right).$$

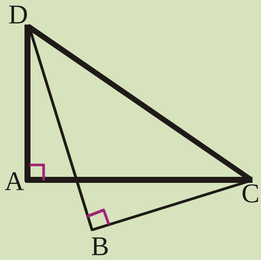


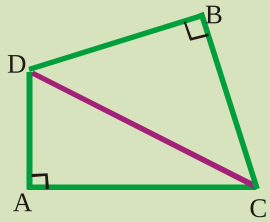
- Les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse sont cocycliques. Cocyclicité remarquable), et alors, par

Exemple

$$2\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)=2\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\ ;$$

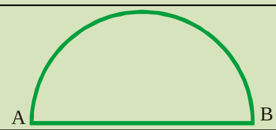
$$\left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)\ ;\ [\pi]$$

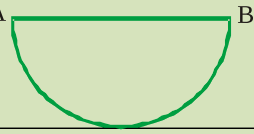




12) Ensemble de points

Soit A et B deux points distincts dans le plan orienté.

L'ensemble des points M du plan tels que	**est**
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=0\ ;\ [\pi]$	La droite (AB) privée de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\pi$	Le segment [AB] privé de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=0$	La droite (AB) privée du segment [AB].
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi]$	Le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}$	Un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B. 

$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$	Un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B. 
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\alpha\ ;\ [\pi]\ ;$ avec $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	Le cercle Γ passant par A et B, tangent à la droite (AT) tel que : $\left(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=\alpha$, et privé de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\alpha$;avec $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$	Le grand arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B du cercle Γ cité en haut.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\alpha+\pi$;avec $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$	Le petit arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B du cercle Γcité en haut.

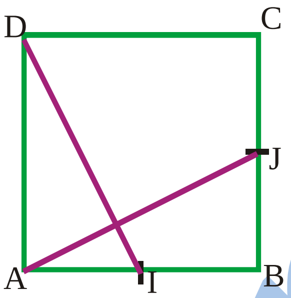
Savoir-faire

A. Applications

Orthogonalité de droites

Exercice 1

ABCD un carré. I et J milieux respectifs de [AB] ; [BC] ;.
Montrer que les droites (AJ) et (ID) sont perpendiculaires.



Solution

On a : $2\left(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}\right)=2\left(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{ID}\right)$(Chasles)

Or, $2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\pi$ (car (AB) $\perp$ (AD)).

$2\left(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=-2\left(\overrightarrow{CI}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$ (reflexion d'axe (BD)) ;

$=2\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CI}\right)$;

$=-2\left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DI}\right)$; (réflexion d'axe la médiatrice de $[AB]$),

$=2\left(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right)$;

Donc : $2\left(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}\right)=2\left(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right)+\pi+2\left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DI}\right)$;

$=\ \pi\ +\ 2\left(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DI}\right)$; (Chasles)

$=\ \pi\ +0$ ($\overrightarrow{DI}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{DI}$)

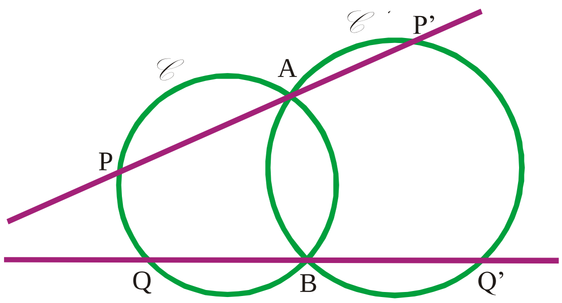
$=\ \pi$

Donc ; $\boxed{2\left(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}\right)=\pi}$; d'où $\boxed{(AJ)\perp(ID)}$.

Parallélisme de droites

Exercice 2

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$’ deux cercles sécants en A et B.
Une droite passant par A recoupe $\mathscr{C}$ en P et en P’.
Une droite passant par B recoupe $\mathscr{C}$’ en Q et en Q’.
Montrer que les droites (PQ) et (P’Q’) sont parallèles.



Solution

$2\left(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'}\right)=2\left(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{PP'}\right)+2\left(\overrightarrow{PP'}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'}\right)$;(Chasles)

$= 2(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{PA}) = 2(\overrightarrow{P'A}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'})$; (remplacement par vecteur colinéaire) ;

$= 2(\overrightarrow{BQ'}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BQ'})$; (cocyclicité données sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$) ;

$= 2(\overrightarrow{BQ}\ ;\ \overrightarrow{BQ'})$; (Chasles) ;

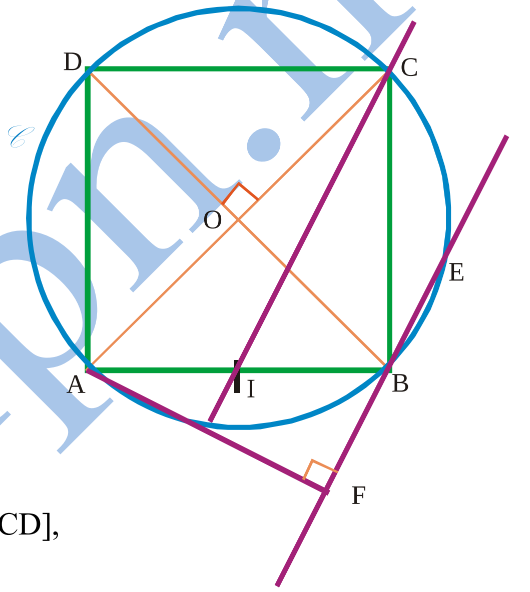
$= 0$; (car $\overrightarrow{BQ}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BQ'}$.)

Donc ; $\boxed{2(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'}) = 0}$; d'où $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{P'Q'}$

Cocyclicité et ensemble de points

Exercice 3

ABCD un carré direct de centre O, de cercle circonscrit $\mathscr{C}$ I milieu de [AB].
La parallèle à (IC) passant par B recoupe $\mathscr{C}$ en E.
F est le projeté orthogonal de A sur (BE).
Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC})$.



2) Montrer que les points O ; A ; B ; F sont cocycliques.
Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA})$

3) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :
$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$.

Solution

1) Comme les points A ; B ; C ; E sont cocycliques
(cocyclicité donnée), A et E de part et d'autre de la corde [CD],
Alors, $(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + \pi$

$= \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 2\pi$; $[2\pi]$;

Donc $\boxed{(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = -\frac{3\pi}{4}}$

2) Comme les triangles AOB et AFB sont rectangles de même hypoténuse [AB].
Donc ; les points O ; A ; B ; F sont cocycliques avec B et F de même côté de la corde [OA].

Donc ; $(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}) = (\overrightarrow{BO}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$;

Donc ; $\boxed{(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi}{4}}$

3) $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})$; $[\pi] \Leftrightarrow$

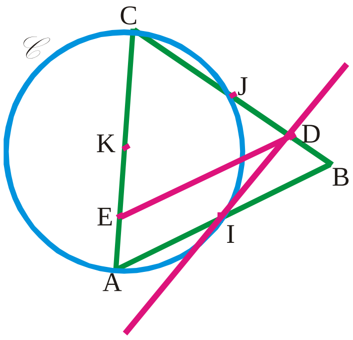
Les points M ; A ; B ; C sont cocycliques ; avec M ≠A et M ≠ B.

Donc ; l'ensemble demandé est le cercle $\mathscr{C}$ privé des points A ; B.

Cocyclicité et ensemble de points

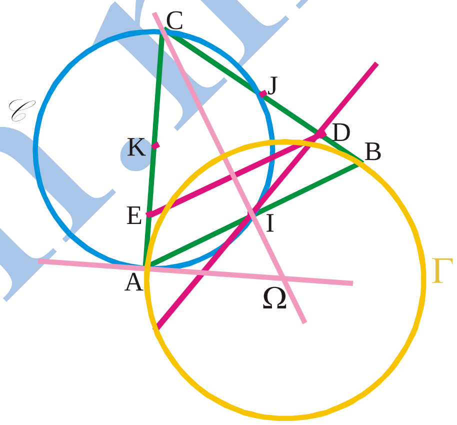
Exercice 4

ABC un triangle équilatéral direct. I ; J ; K les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA].
$\mathscr{C}$ un cercle circonscrit au triangle AIC.
La tangente à $\mathscr{C}$ en I coupe (BC) en D.
Le triangle DCE est équilatéral direct.
1) Montrer que J appartient à $\mathscr{C}$.
2) Montrer que les points I ; D ; C ; E sont cocycliques.
3) Déterminer et construire Γ l'ensemble des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{6}\ ;\ [\pi]$.



Solution

Comme : les triangles IAJ et JAL sont rectangles de même hypoténuse [AC].
Donc ; les points I ; J ; A ; L sont cocycliques.
Donc ; J appartient au cercle circonscrit au triangle (IAC) qui est $\mathscr{C}$.
Donc ; J ∈ $\mathscr{C}$.



2) EDC est équilatéral direct.

Donc ; $2\left(\overrightarrow{ED}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

Or ; $2\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$; (angle inscrit et tan gente)

$2\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$; (remplacement par vecteur colinéaire)

Or; ABC est équilatéral direct ;

Donc, $2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

Donc ; $2\left(\overrightarrow{ED}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right) = 2\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}\right)$;

D'où ; les points I ; D ; C ; E sont cocycliques.

3) $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{3}\ ;\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)\ ;\ [\pi]$;

Donc ; Γ est le cercle privé de A et B, tangent à (AC) et passant par A et B, de centre Ω intersection de la médiatrice de [AB] avec la perpendiculaire à (AC) en A.

B. Exercices

1. ABC un triangle isocèle rectangle en A direct, I, milieu de [BC].
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$;$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AI})$;$(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AI})$;
$(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})$;$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BI})$; $(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IB})$;
$(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IC})$;$(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IC})$.

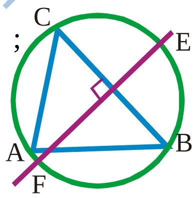
2. ABC un triangle équilatéral direct de centre O.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC})$;$(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{CO})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{BA})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{BC})$

3. ABCD est un pentagone régulier direct de centre O.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OD})$;$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{OA})$
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OD})$;$(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{OA})$

4. ABC un triangle équilatéral direct de centre O.
I ; J ; K les milieux respectifs de [AB]; [BC] ; [CA]
1) Justifier que les points A ; I ; O K sont cocycliques ainsi que les points A ; B ; J ; K.
2) Donner tous les groupes de points de la figure, qui sont cocycliques pour la même raison que les deux groupes de points de la 1ère question.

5. ABC un triangle d'angles aigus, d'orthocentre H ; α ; β ; γ les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. les points H_1 ; H_2 ; H_3 sont les symétriques de H respectivement par rapport à (AB) ; (BC) ; (CA).
1) Faire une figure.
2) Montrer que les points A ; B ; C ; H sont cocycliques et donner deux autres points

7. ABC un triangle de cercle circonscrit $\mathscr{C}$. la médiatrice de [BC] coupe $\mathscr{C}$ en E et F.
1) Montrer que $\left(\overrightarrow{FB}\ ;\ \overrightarrow{FE}\right)=\left(\overrightarrow{FE}\ ;\ \overrightarrow{FC}\right)$;
Montrer que : (AE) est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$.



8. ABC un triangle de cercle circonscrit $\mathscr{C}$.
1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tel que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$.
2) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M du plan tel que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$.

9. ABC un triangle équilatéral direct de centre O. 1) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{3}$.
2) Déterminer et construire l'ensemble Γ ' des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{6};[\pi]$.

10 ABC un triangle isocèle en A, de cercle circonscrit $\mathscr{C}$. P un point du segment [BC] privé de B et C. La droit (AP) recoupe $\mathscr{C}$ en M.
1) Montrer que la droite (AB) est tangente au cercle $\mathscr{C}_1$ circonscrit au triangle BPM.
2) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit au triangle CPM.

11 1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, tels que $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha$ Soit k et k' deux réels non nuls.
Exprimer en fonction de α, l'angle $\left(k\vec{u}\ ;k'\vec{v}\right)$
Dans chacun des cas suivants :
a) kk'> 0 ; b) kk'< 0

appartenant au cercle circonscrit au triangle ABC.
3) Montrer que $\left(\overrightarrow{\alpha\beta}\ ;\ \overrightarrow{\alpha A}\right)=\left(\overrightarrow{\alpha A}\ ;\ \overrightarrow{\alpha\delta}\right)$

Quelle est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{\alpha\beta}\ ;\ \overrightarrow{\alpha\delta}\right)$? Que représente H pour le triangle $\alpha\beta\,\gamma$?

6. ABCD un quadrilatère de cercle circonscrit $\mathscr{C}$ tel que les droites (AD) et (BC) se coupent en E et les droites (AC)et (BD) se coupent en F. D'est le symétrique de D par rapport à la droite (EF).
Montrer que les points E ; F ; C ; D' sont cocycliques.

2) Soit $\vec{u}\ ;\ \vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$

Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$\left(2\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$; $\left(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$; $\left(-\vec{u}\ ;-\vec{v}\right)$;$\left(-\vec{u}\ ;-3\,\vec{v}\right)$;
$\left(\vec{u}\ ;\dfrac{1}{2}\vec{v}\right)$;$\left(3\vec{u}\ ;5\,\vec{v}\right)$;$\left(2\vec{u}\ ;-7\,\vec{v}\right)$

12 ABC un triangle. A' ; B' ; C' des points des segments [BC] ; [CA] ; [AB] respectivement tels que : les cercles circonscrits aux triangles A'BC' et A'B'C se recoupent en I. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle AB'C'.